**第9讲 基本不等式**

**【知识点梳理】**

**1.基本不等式**

如果，那么，当且仅当时，等号成立．其中，叫作的算术平均数，叫作的几何平均数．即正数的算术平均数不小于它们的几何平均数．

**基本不等式1：**若，则，当且仅当时取等号；

**基本不等式2：**若，则（或），当且仅当时取等号.

**注意**（1）基本不等式的前提是“一正”“二定”“三相等”；其中“一正”指正数，“二定”指求最值时和或积为定值，“三相等”指满足等号成立的条件.（2）连续使用不等式要注意取得一致.

**【方法技巧与总结】**

**1.几个重要的不等式**

（1）

（2）基本不等式：如果，则(当且仅当“”时取“”).

特例：（同号）.

（3）其他变形：

①(沟通两和与两平方和的不等关系式)

②(沟通两积与两平方和的不等关系式)

③(沟通两积与两和的不等关系式)

④重要不等式串：即

调和平均值几何平均值算数平均值平方平均值(注意等号成立的条件).

**2.均值定理**

已知.

（1）如果(定值)，则(当且仅当“”时取“=”).即“和为定值，积有最大值”.

（2）如果(定值)，则(当且仅当“”时取“=”).即积为定值，和有最小值”.

**3.常见求最值模型**

模型一：，当且仅当时等号成立；

模型二：，当且仅当时等号成立；

模型三：，当且仅当时等号成立；

模型四：，当且仅当时等号成立.

**【典型例题】**

**题型一 直接利用基本不等式求最值**

**【例1】**（2021·湖南邵阳市）若正实数满足.则的最大值为（ ）

A． B． C． D．

【答案】B

【解析】当且仅当时取等号，

即*xy*的最大值为故选：B

**【例2】**（2021·六安市裕安区新安中学）已知，则的最大值为（ ）

A． B． C． D．

【答案】D

【解析】因为，所以，

所以，当且仅当，即时，等号成立，

所以，整理得，即.

所以的最大值为.故选：D.

【题型专练】

1.（2022·甘肃酒泉·模拟预测（理））若*x*，*y*为实数，且，则的最小值为（       ）

A．18 B．27 C．54 D．90

【答案】C

【解析】由题意可得，当且仅当时，即等号成立.

故选：C．

2.（2022·河南河南·三模（理））已知二次函数（）的值域为，则的最小值为（       ）

A． B．4 C．8 D．

【答案】B

【详解】由于二次函数（）的值域为，

所以，所以，所以，

当且仅当即时等号成立.

故选：B

**题型二 “1”的代换，乘1法**

1的代换就是指凑出1，使不等式通过变形出来后达到运用基本不等式的条件，即积为定值，凑的过程中要特别注意等价变形．

**【例1】**（2021·上海市大同中学）设为正数，且，则的最小值为\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】因为为正数，且，

所以,

当且仅当a=b=1时取等号即的最小值为4.故答案为：4

**【例2】**（2021·河北石家庄市）已知，且，则的最小值是（ ）

A．4 B．5 C．6 D．9

【答案】B

【解析】由，得，

所以，

当且仅当，取等号.故选：B.

**【例3】**（2021·北京师范大学万宁附属中学）已知，，则的最小值为（ ）

A． B． C． D．

【答案】B

【解析】因为，，且，

所以，

当且仅当即，时，有最小值.故选：B.

**【例4】**（2021·浙江高一期末），，且，不等式恒成立，则的范围为\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】因为，

所以

，

当且仅当，即时，取等号，

因为不等式恒成立，所以小于等于最小值，所以

**【例5】**（2021·浙江）当时，不等式恒成立，则实数的最大值为（ ）

A． B． C． D．

【答案】C

【解析】不等式恒成立化为恒成立，

因为，所以，

所以

，当且仅当，即时，等号成立.

所以，所以的最大值为. 故选：C

**【例6】**若学优高考网(www.gkstk.com),国内最领先的高考网站,每天发布最有价值的高考资料,累计帮助千万考生获得成功!， 学优高考网(www.gkstk.com),国内最领先的高考网站,每天发布最有价值的高考资料,累计帮助千万考生获得成功!，则学优高考网(www.gkstk.com),国内最领先的高考网站,每天发布最有价值的高考资料,累计帮助千万考生获得成功!的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】因为，所以，所以，所以

当且仅当，等号成立.

**【例7】**若是正实数，且，则的最小值为　 　．

【答案】

【解析】因为，所以，当且仅当，等号成立.

**【例8】**设，，则的最小值是 ．

【答案】

【解析】因为，所以，

当时，，当当时，

【题型专练】

1.（2022·辽宁·模拟预测）已知正实数*x*，*y*满足，则的最小值为（       ）

A．2 B．4 C．8 D．12

【答案】C

【解析】

【分析】

依题意可得，则，再由乘“1”法及基本不等式计算可得；

【详解】

解：由，且，可得，

所以

，当且仅当，即，时取等号．

故选：C

2.（2022·安徽·南陵中学模拟预测（理））若实数*，*满足，则的最小值为（       ）

A． B． C． D．

【答案】A

【解析】

【分析】

对已知条件和要求最值的代数式恒等变形之后应用均值不等式即可求解

【详解】



因为，，所以，

又

所以



当且仅当即，时，取等号

所以

故选：A

3.（2022·四川·石室中学三模（文））已知，且，则的最小值是(       )

A．49 B．50 C．51 D．52

【答案】B

【解析】

【分析】

将中分子1替换为*a*+*b*，将中分子8替换为8(*a*+*b*)，化简即可利用基本不等式求该式子的最小值．

【详解】

由已知，得

，

当且仅当，即，时等号成立．

因此，的最小值是50．

故选：B．

4.（2022·河南·宝丰县第一高级中学模拟预测（文））已知正数*a*，*b*满足，则的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】9

【解析】

【分析】

由得，则，展开利用基本不等式可求得最值.

【详解】

由得，所以，

当且仅当，即，时取等号，故的最小值为9.

故答案为：9

5.（2022·天津·南开中学模拟预测）设，，，则的最小值为\_\_\_\_\_\_．

【答案】.

【解析】

【分析】

两次运用“1”进行整体代换，结合基本不等式，即可得结果.

【详解】

因为，所以



当且仅当时，等号成立，即的最小值为，

故答案为：.

6．（2022·重庆·三模）已知，，且，则的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】4

【解析】

【分析】

由题得，再利用基本不等式求出的最小值即得解.

【详解】

解：由题得，

所以.

(当且仅当时取等)

因为，所以的最小值为4.

故答案为：4

**题型三 常规凑配法**

**【例1】**（2021·云南文山壮族苗族自治州）已知，函数的最小值为（ ）

A．4 B．7 C．2 D．8

【答案】B

【解析】因为，所以，

当且仅当即时取等号，所以的最小值为7.故选：B

**【例2】**（2021·安徽省泗县第一中学）函数的最小值为（ ）

A． B． C． D．

【答案】A

【解析】因为，所以，所以，

当且仅当，即时等号成立，所以的最小值为.故选：A．

**【例3】**若对任意，恒成立,则的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】，因，所以

**【例4】**设，则的最小值是

（*A*）2 （*B*）4 （*C*）  （*D*）5

【答案】

【解析】

原式



**【例5】**（2022·全国·高三专题练习（理））若 ，则有（       ）

A．最大值 B．最小值 C．最大值 D．最小值

【答案】A

【解析】

【分析】

将给定函数化简变形，再利用均值不等式求解即得.

【详解】

因，则，

于是得，当且仅当，即时取“=”，

所以当时，有最大值.

故选：A

【题型专练】

1.（2022·全国·高三专题练习）函数的最小值是（       ）

A． B．

C． D．

【答案】D

【解析】

由，利用基本不等式求最小值即可.

【详解】

因为，所以，当且仅当，即时等号成立.

所以函数的最小值是.

故选：D.

【点睛】

本题考查利用基本不等式求最值，考查学生的计算求解能力，属于基础题.

2.（2022·全国·高三专题练习）若，且，则的最小值为（       ）

A．3 B． C． D．

【答案】D

【解析】

【分析】

利用给定条件确定，变形并借助均值不等式求解即得.

【详解】

因，且，则，即有，同理，

由得：，

于是得，

当且仅当，即时取“=”，

所以的最小值为.

故选：D

3.（2022·上海·高三专题练习）若，则函数的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】3

【解析】

【分析】

由，及，利用基本不等式可求出最小值.

【详解】

由题意，，

因为，所以，当且仅当，即时等号成立.

所以函数的最小值为3.

故答案为：3.

**题型四 换元法**

**【例1】**（2021·永丰县永丰中学高一期末）函数（）的最小值为（ ）

A． B． C． D．

【答案】B

【解析】因为，设，所以

所以，

当且仅当，即，所以时取等号，

所以函数（）的最小值为，故选：B

**【例2】**（2021·全国高一课时练习）函数的最小值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】4

【解析】令，则，当且仅当，即时，.

所以函数的最小值是4.故答案为：4

**题型五 消参法**

消参法就是对应不等式中的两元问题，用一个参数表示另一个参数，再利用基本不等式进行求解.解题过程中要注意“一正，二定，三相等”这三个条件缺一不可！

**【例1】**已知，则的最小值是 ．

【答案】

【解析】因，所以，所以

当且仅当，即时取等号

**【例2】**若实数，满足，则的最小值为　 　．

【答案】

【解析】因，所以，所以，因此



当且仅当时取等号

**【题型专练】**

1.（2022·浙江绍兴·模拟预测）若直线过点，则的最大值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】

将点代入直线方程可得，将平方，结合均值不等式可得答案.

【详解】

直线过点，则

又，设，则



由，当且仅当，即时等号成立.

所以，即

所以的最大值为，当且仅当时等号成立.

故答案为：

2.（2022·全国·高三专题练习）设正实数，，满足，则当取得最大值时，的最大值为（       ）

A． B． C． D．

【答案】D

【解析】

【分析】

利用可得，根据基本不等式最值成立的条件可得，代入可得关于的二次函数，利用单调性求最值即可.

【详解】

由正实数，，满足，

．

，

当且仅当时取等号，此时．

，当且仅当时取等号，

即的最大值是1．

故选：D

【点睛】

本题主要考查了基本不等式的性质和二次函数的单调性，考查了最值取得时等号成立的条件，属于中档题.

3.（2022·全国·高三专题练习（理））已知正实数*a*，*b*满足，则的最小值是（　　）

A．2 B． C． D．6

【答案】B

【解析】

【分析】

根据变形得，进而转化为，

用凑配方式得出，再利用基本不等式即可求解.

【详解】

由，得，

所以，

当且仅当，即取等号.

故选：B.

**题型六 双换元**

若题目中含是求两个分式的最值问题，对于这类问题最常用的方法就是双换元，分布运用两个分式的分母为两个参数，转化为这两个参数的不等关系．

**【例1】**若，且，则的最小值为 ．

【答案】

【解析】设，则，所以，

因此

因

所以

**【例2】**已知，求的最大值.

【答案】

【解析】设，则，

因此

因

所以

**【例3】**（2022·浙江省江山中学高三）设，，若，则的最大值为（       ）

A． B． C． D．

【答案】D

【解析】

【分析】

法一：设，进而将问题转化为已知，求的最大值问题，再根据基本不等式求解即可；

法二：由题知进而根据三角换元得，再根据三角函数最值求解即可.

【详解】

解：法一：（基本不等式）

设，则，

条件，

所以，即*.*

故选：D.

法二：（三角换元）由条件，

故可设，即，

由于，，故，解得

所以，，

所以,当且仅当时取等号.

故选：D.

【题型专练】

1.（2022·天津南开·一模）若，，，，则的最小值为\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】

令 ，则，由此可将变形为，结合基本不等式，即可求得答案。

【详解】

由题意，，，，得：，

设 ，则 ，

故

 ，

当且仅当 ，即 时取得等号，

故的最小值为，

故答案为：

2.（2022·全国·高三专题练习）已知，，，则取到最小值为 \_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】．

【解析】

【详解】

试题分析：令，∴，

∴

，当且仅当时，等号成立，

即的最小值是．

考点：基本不等式求最值．

【思路点睛】用基本不等式求函数的最值，关键在于将函数变形为两项和或积的形式，然后用基本不等式求出最值．在求条件最值时，一种方法是消元，转化为函数最值；另一种方法是将要求最值的表达式变形，然后用基本不等式将要求最值的表达式放缩为一个定值，但无论哪种方法在用基本不等式解题时都必须验证等号成立的条件．

3.（2022·全国·高三专题练习）若，且，则的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_

【答案】

【解析】

【分析】

令，可得，化简可得，再结合基本不等式可求解.

【详解】

令，则，

则，即，

则



，

当且仅当，即时等号成立，

故的最小值为.

故答案为：.

【点睛】

关键点睛：本题考查基本不等式的应用，解题的关键是令，化简得出利用基本不等式求解.

4.（2022·全国·高三专题练习）若正实数，满足，则的最小值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【详解】

根据题意，若，则；又由，则有，则；当且仅当时，等号成立；即的最小值是，故答案为.

点睛：本题主要考查了基本不等式，关键是根据分式的运算性质，配凑基本不等式的条件，基本不等式求最值应注意的问题(1)使用基本不等式求最值，其失误的真正原因是对其前提“一正、二定、三相等”的忽视．要利用基本不等式求最值，这三个条件缺一不可．(2)在运用基本不等式时，要特别注意“拆”“拼”“凑”等技巧，使其满足基本不等式中“正”“定”“等”的条件.

**题型七 齐次化**

齐次化就是含有多元的问题，通过分子、分母同时除以得到一个整体，然后转化为运用基本不等式进行求解．

**【例1】**已知，，，则的最小值为　 　．

【答案】

【解析】，因为，

所以

**【例2】**（2022·全国·高三专题练习（理））若*a*，*b*，*c*均为正实数，则的最大值为（       ）

A． B． C． D．

【答案】A

【解析】

【分析】

对原式变形，两次利用基本不等式，求解即可.

【详解】

因为*a*，*b*均为正实数，

则

，

当且仅当，且，即时取等号，

则的最大值为．

故选：A．

【点睛】

易错点睛：利用基本不等式求最值时，要注意其必须满足的三个条件：

（1）“一正二定三相等”中的“一正”就是各项必须为正数；

（2）“二定”就是要求和的最小值，必须把构成和的二项之积转化成定值；要求积的最大值，则必须把构成积的因式的和转化成定值；

（3）“三相等”是利用基本不等式求最值时，必须验证等号成立的条件，若不能取等号则这个定值就不是所求的最值，这也是最容易发生错误的地方，注意多次运用不等式，等号成立条件是否一致.

【题型专练】

1.（2022·全国·高三专题练习）已知三次函数在上单调递增，则最小值为（       ）

A． B． C． D．

【答案】D

【解析】

【分析】

由函数单调性可知恒成立，结合二次函数图象与性质可确定，由此化简所求式子为；利用，配凑出符合对号函数的形式，利用对号函数求得最小值.

【详解】

在上单调递增，恒成立，

，，，，

，

令，设，

则，

，，（当且仅当，即时取等号），

，即的最小值为.

故选：.

【点睛】

本题考查利用对号函数求解最值的问题，涉及到根据导数的单调性确定参数范围、分式型函数最值的求解问题；关键是能够通过二次函数的图象与性质确定的关系，进而构造出符合对号函数特点的函数.

2.（2022·天津·高三专题练习）已知，，且，则的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】

先变形：，再根据基本不等式求最值.

【详解】





当且仅当，即时取等号

即的最小值为.

故答案为：.

3.（2022·浙江·高三专题练习）已知*x*，*y*，*z*为正实数，且，则的最大值为\_\_\_\_\_\_．

【答案】2

【解析】

【分析】

由已知得，再根据基本不等式求得，由此可得最大值.

【详解】

解：因为，所以，

又*x*，*y*，*z*为正实数，所以，当且仅当时取等号，

所以，即，所以，当且仅当时取等号.

所以的最大值为2，

故答案为：2.

4．已知，，，则的最小值为（ ）

A． B． C． D．

【答案】B

【解析】已知，，，

则，

当且仅当 时，即当，且，等号成立，

故的最小值为，

**题型八 和、积、平方和的转化**

若出现， 其中、、、、

因为，可以转化为或，

从而求出及的取值范围．若出现求取值范围，先将式子因式分解成为形式，再用基本不等式求出最值．

**【例1】**（2022重庆月考）设，，，则　　

A．有最大值8 B．有最小值8 C．有最大值8 D．有最小值8

【答案】B

【解析】设，则，所以，因，所以，即

，所以，解得，所以

设，则，所以， ，所以 因，所以，即，所以，解得，所以

**【例2】**设求最小值．

【答案】

【解析】因，所以，即，所以，即

，所以

**【例3】**设为实数，若，则的最大值是 ．

【答案】

【解析】设，则，即，所以，所以

，因，所以，即，所以，即，解得，所以

【题型专练】

1．（2022·河北保定·二模）已知*a*，，且，则的最大值为（       ）

A．2 B．3 C． D．

【答案】C

【解析】

【分析】

由题知，进而得，再结合已知得，即可得答案.

【详解】

解：，

则，当且仅当时，“=”成立，

又*a*，，所以，当且仅当时，“=”成立，

所以的最大值为.

故选：C

2.（2022·浙江·模拟预测）已知正实数*x*，*y*满足：，则的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】

根据，可得，再令，再利用基本不等式即可得出答案.

【详解】

解：因为，

所以，

所以，

所以，

令，

则，

当且仅当即时取等号，

所以的最小值为.

故答案为：.

**题型九 多选题**

**【例1】**（2022·河北张家口·三模）已知，（*m*是常数），则下列结论正确的是（       ）

A．若的最小值为，则

B．若的最大值为4，则

C．若的最大值为*m*，则

D．若，则的最小值为2

【答案】BC

【解析】

【分析】

根据已知等式，利用基本不等式逐一判断即可.

【详解】

由已知得，

，解得，当时取等号，故A错误；

，，当时取等号，故B正确；

，，当时取等号，故C正确；

对于D，

，当时取等号，又，且，所以等号取不到，故D错误，

故选：BC.

**【例2】**（2022·河北·模拟预测）已知，则以下不等式成立的是（       ）

A． B． C． D．

【答案】BCD

【解析】

【分析】

直接利用基本不等式即可判断ACD，由，可得，整理即可判断B.

【详解】

解：对于A，因为，

所以，所以，

当且仅当时取等号，故A错误；

对于B，









，

当且仅当时取等号，

所以，即，故B正确；

对于C，，

当且仅当，即时取等号，故C正确；

对于D，，

当且仅当且，即时取等号，故D正确.

故选：BCD.

**【例3】**（2022·山东菏泽·二模）设*a*，*b*为两个正数，定义*a*，*b*的算术平均数为，几何平均数为．上个世纪五十年代，美国数学家D．H. Lehmer提出了“Lehmer均值”，即，其中*p*为有理数．下列结论正确的是（       ）

A． B．

C． D．

【答案】AB

【解析】

【分析】

根据基本不等式比较大小可判断四个选项.

【详解】

对于A，，当且仅当时，等号成立，故A正确；

对于B，，当且仅当时，等号成立，故B正确；

对于C，，当且仅当时，等号成立，故C不正确；

对于D，当时，由C可知，，故D不正确.

故选：AB

**【例4】**对任意*x*，*y*，，则（ ）

A.  B. 

C.  D. 

【答案】BC

【解析】

【分析】根据基本不等式或者取特值即可判断各选项的真假．

【详解】因为（**R**），由可变形为，，解得，当且仅当时，，当且仅当时，，所以A错误，B正确；

由可变形为，解得，当且仅当时取等号，所以C正确；

因为变形可得，设，所以，因此

，所以当时满足等式，但是不成立，所以D错误．

故选：BC．

【题型专练】

1.（2022·江苏·扬州中学高三开学考试（多选题））设，，下列结论中正确的是（       ）

A． B．

C． D．

【答案】ACD

【解析】

【分析】

利用基本不等式可判断ACD选项的正误，利用特殊值法可判断B选项的正误.

【详解】

对于A选项，，

当且仅当时，等号成立，A对；

对于B选项，取，则，B错；

对于C选项，，，

所以，，即，当且仅当时，等号成立，C对；

对于D选项，因为，则，

所以，，当且仅当时，两个等号同时成立，D对.

故选：ACD.

2．（多选题）设，且，那么（ ）

A．有最小值 B．有最大值

C．有最大值 D．有最小值

【答案】AD

【解析】解：①由题已知得：,

故有,

解得或（舍）,

即（当且仅当时取等号）,A正确;

②因为,

所以,

又因为

,





有最小值,D正确.

故选AD

